Notación asintótica

José de Jesús Lavalle Martínez

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación
Maestría en Ciencias de la Computación
Análisis y Diseño de Algoritmos
MCOM 20300

Contenido

Introducción

- Deseamos determinar matemáticamente la cantidad de recursos que necesita un algoritmo como una función del tamaño (en ocasiones el valor) de los ejemplares considerados.

Introducción

- Ya que no existe una computadora estándar a la cual se puedan referir todas las mediciones de **tiempo de cálculo**, nos debemos conformar con expresar el tiempo que tarda un algoritmo dentro de una constante multiplicativa.

Introducción

- Para lograr esto usaremos la **notación asintótica**. Se llama asintótica porque trata con el comportamiento de las funciones en el límite, es decir, para valores de sus parámetros suficientemente grandes.

Una notación para *el Orden de* (O grande) I

- Formalizaremos en primer lugar la noción usada con anterioridad para referirnos a que un algoritmo es mejor que otro o bien que un algortitmo a lo más se comporta tan lento como otro.

Una notación para *el Orden de* (O grande) I

- Por supuesto, haremos estas convenciones retomando la idea de que un algoritmo se caracteriza por una **función de comportamiento** dependiente del tamaño del ejemplar cuyo valor es el tiempo que requiere el algoritmo para realizar su tarea.

Una notación para *el Orden de* (O grande) I

- Conviene, asimismo, señalar que todas estas funciones son no negativas pues siempre un algoritmo tarda al menos cero unidades.

Una notación para *el Orden de* (O grande) II

- Un algoritmo, con función g, será mejor o a lo más igual que otro, con función f, si $g(n) \leq cf(n)$ para toda $n > N$ y cierta constante $c > 0$ (recordemos que el principio de invarianza refería a dos desigualdades para indicar el mismo comportamiento).

Una notación para *el Orden de* (O grande) II

- Precisando: se dice que una función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ está en *el orden de* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ ssi existe $c > 0$ tal que $g(n) \leq cf(n)$ para toda $n \geq N$, $N \in \mathbb{N}$.

Una notación para *el Orden de* (O grande) II

- Destacamos que para afirmar que g está en el orden de f debe determinarse c (el **múltiplo**) y N (el **umbral**) de tal forma que $g(n) \leq cf(n)$ para toda $n \geq N$.

Una notación para *el Orden de* (O grande) III

Notemos que dada una función f, habrá muchas funciones g que satisfagan esta relación, por ejemplo si $f(n) = n^2$, entonces están en el orden de f: $g_1(n) = n$, $g_2(n) = \log(n)$, $g_3(n) = n\log(n)$, $g_4(n) = 2n^2$, etc. Llamaremos a esta clase de funciones $O(f(n))$.

Una notación para *el Orden de* (O grande) III

Definición 1

La clase de funciones que están **acotadas superiormente** por un múltiplo de f es:

$$O(f(n)) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0} | (\exists c > 0, N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(g(n) \leq cf(n))\} \quad (1)$$

Gráficas

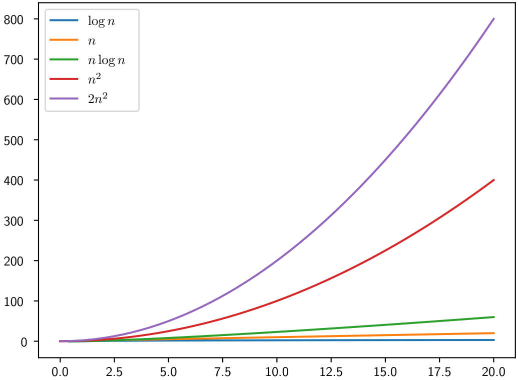

Figure 1: Una representación gráfica de que $\log n, n, n \log n, 2n^2 \in O(n^2)$.

Ejemplos de que $g_1(n) \in O(f(n))$

Ejemplo 2

Sea $f(n) = n^2$, demuestre que $g_1(n) = n$ está en el orden de $f(n)$.

Ejemplo 2

Sea $f(n) = n^2$, demuestre que $g_1(n) = n$ está en el orden de $f(n)$.

Solución: Por (1) deben existir $c > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\forall n \geq N$ se cumple que $g_1(n) \leq cf(n)$, así:

Ejemplos de que $g_1(n) \in O(f(n))$

Ejemplo 2

Sea $f(n) = n^2$, demuestre que $g_1(n) = n$ está en el orden de $f(n)$.

Solución: Por (1) deben existir $c > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\forall n \geq N$ se cumple que $g_1(n) \leq cf(n)$, así:

$$n \leq cn^2$$
$$1 \leq cn$$

Ejemplos de que $g_1(n) \in O(f(n))$

Ejemplo 2

Sea $f(n) = n^2$, demuestre que $g_1(n) = n$ está en el orden de $f(n)$.

Solución: Por (1) deben existir $c > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\forall n \geq N$ se cumple que $g_1(n) \leq cf(n)$, así:

$$n \leq cn^2$$
$$1 \leq cn$$

- Si tomamos $c = 1$ obtenemos que $1 \leq n$, así $N = 1$.

Ejemplo 2

Sea $f(n) = n^2$, demuestre que $g_1(n) = n$ está en el orden de $f(n)$.

Solución: Por (1) deben existir $c > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\forall n \geq N$ se cumple que $g_1(n) \leq cf(n)$, así:

$$n \leq cn^2$$
$$1 \leq cn$$

- Si tomamos $c = 1$ obtenemos que $1 \leq n$, así $N = 1$.
- Si tomamos $c = \frac{1}{2}$ obtenemos que $1 \leq \frac{1}{2}n \Leftrightarrow 2 \leq n$, así $N = 2$.

Ejemplos de que $g_1(n) \in O(f(n))$

Ejemplo 2

Sea $f(n) = n^2$, demuestre que $g_1(n) = n$ está en el orden de $f(n)$.

Solución: Por (1) deben existir $c > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\forall n \geq N$ se cumple que $g_1(n) \leq cf(n)$, así:

$$n \leq cn^2$$
$$1 \leq cn$$

- Si tomamos $c = 1$ obtenemos que $1 \leq n$, así $N = 1$.
- Si tomamos $c = \frac{1}{2}$ obtenemos que $1 \leq \frac{1}{2}n \Leftrightarrow 2 \leq n$, así $N = 2$.
- Si tomamos $c = 2$ obtenemos que $1 \leq 2n \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq n$, así $N = 1$.

Ejemplos de que $g_4(n) \in O(f(n))$

Ejemplo 3

Sea $f(n) = n^2$, demuestre que $g_4(n) = 2n^2$ está en el orden de $f(n)$.

Ejemplo 3

Sea $f(n) = n^2$, demuestre que $g_4(n) = 2n^2$ está en el orden de $f(n)$.

Solución: Por (1) deben existir $c > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\forall n \geq N$ se cumple que $g_4(n) \leq cf(n)$, así:

Ejemplo 3

Sea $f(n) = n^2$, demuestre que $g_4(n) = 2n^2$ está en el orden de $f(n)$.

Solución: Por (1) deben existir $c > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\forall n \geq N$ se cumple que $g_4(n) \leq cf(n)$, así:

$$2n^2 \leq cn^2$$
$$2 \leq c$$

Ejemplo 3

Sea $f(n) = n^2$, demuestre que $g_4(n) = 2n^2$ está en el orden de $f(n)$.

Solución: Por (1) deben existir $c > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\forall n \geq N$ se cumple que $g_4(n) \leq cf(n)$, así:

$$2n^2 \leq cn^2$$
$$2 \leq c$$

Así, podemos tomar $N = 0$.

Consideraciones sobre $O(f(n))$

- La definición de g "está en el orden de" f contiene una redundancia al exigir la determinación tanto del múltiplo como del umbral.

Consideraciones sobre $O(f(n))$

- La constante c permite que el múltiplo de f supere a una función g siempre que ésta no crezca más rápido que f.

- Pero también es posible que en un intervalo finito la función f tome valores negativos, lo cual se evita “saltando” este intervalo al dar un valor de umbral mayor que el límite superior de ese intervalo. Lo mismo podemos hacer cuando f toma valor cero.

Consideraciones sobre $O(f(n))$

- Ya que las funciones de comportamiento no toman valores negativos, aunque sí el valor cero, podemos llevar nuestra observación hacia una formulación más simple de la clase de funciones con cota superior f.

- Lo anterior es una justificación de la proposición 4.

Regla del umbral I

Proposición 4 (Regla del Umbral)

Sea f estrictamente positiva. $g(n) \in O(f(n))$ si y sólo si existe $c > 0$ tal que $g(n) \leq cf(n)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Regla del umbral I

Proposición 4 (Regla del Umbral)

Sea f estrictamente positiva. $g(n) \in O(f(n))$ si y sólo si existe $c > 0$ tal que $g(n) \leq cf(n)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Por la definición (1), $g(n) \in O(f(n))$ significa que deben existir $d > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\forall n \geq N$ se cumple que $g(n) \leq df(n)$.

Regla del umbral I

Proposición 4 (Regla del Umbral)

Sea f estrictamente positiva. $g(n) \in O(f(n))$ si y sólo si existe $c > 0$ tal que $g(n) \leq cf(n)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Por la definición (1), $g(n) \in O(f(n))$ significa que deben existir $d > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\forall n \geq N$ se cumple que $g(n) \leq df(n)$.

Así, otra forma de enunciar lo que debemos demostrar es: Existe $d > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\forall n \geq N$ se cumple que $g(n) \leq df(n)$ si y sólo si existe $c > 0$ tal que $g(n) \leq cf(n)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Regla del umbral I

Proposición 4 (Regla del Umbral)

Sea f estrictamente positiva. $g(n) \in O(f(n))$ si y sólo si existe $c > 0$ tal que $g(n) \leq cf(n)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Por la definición (1), $g(n) \in O(f(n))$ significa que deben existir $d > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\forall n \geq N$ se cumple que $g(n) \leq df(n)$.

Así, otra forma de enunciar lo que debemos demostrar es: Existe $d > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\forall n \geq N$ se cumple que $g(n) \leq df(n)$ si y sólo si existe $c > 0$ tal que $g(n) \leq cf(n)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

$\leftarrow$ La demostración en este sentido es obvia, ya que toda propiedad que se cumple para todos los naturales se cumple también para un subconjunto de ellos, simplemente tome $N = 0$ y $d = c$.

Regla del umbral II

Existe $d > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\forall n \geq N$ se cumple que $g(n) \leq df(n)$ si y sólo si existe $c > 0$ tal que $g(n) \leq cf(n)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Regla del umbral II

Existe $d > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\forall n \geq N$ se cumple que $g(n) \leq df(n)$ si y sólo si existe $c > 0$ tal que $g(n) \leq cf(n)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

$\rightarrow$ Asuma que $N > 0$, ya que de no ser así no habría que demostrar.

Regla del umbral II

Existe $d > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\forall n \geq N$ se cumple que $g(n) \leq df(n)$ si y sólo si existe $c > 0$ tal que $g(n) \leq cf(n)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

$\rightarrow$ Asuma que $N > 0$, ya que de no ser así no habría que demostrar.

Sea $b = \max\{g(n)/f(n) | 0 \leq n < N\}$, el valor más grande tomado de la razón de g y f sobre los números naturales menores que N (esta definición tiene sentido porque $f(n)$ no puede ser cero y $N > 0$). Por definición de máximo $b \geq g(n)/f(n)$, por lo tanto $g(n) \leq bf(n)$, siempre que $0 \leq n < N$.

Regla del umbral II

Existe $d > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\forall n \geq N$ se cumple que $g(n) \leq df(n)$ si y sólo si existe $c > 0$ tal que $g(n) \leq cf(n)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

$\rightarrow$ Asuma que $N > 0$, ya que de no ser así no habría que demostrar.

Sea $b = \max\{g(n)/f(n) | 0 \leq n < N\}$, el valor más grande tomado de la razón de g y f sobre los números naturales menores que N (esta definición tiene sentido porque $f(n)$ no puede ser cero y $N > 0$). Por definición de máximo $b \geq g(n)/f(n)$, por lo tanto $g(n) \leq bf(n)$, siempre que $0 \leq n < N$.

Pero por hipótesis sabemos que $g(n) \leq df(n)$ siempre que $n \geq N$. Ahora elegimos $c = \max\{b, d\}$ para concluir que $g(n) \leq cf(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Regla del máximo I

- Las funciones de comportamiento son expresiones obtenidas del análisis de los algoritmos y será común encontrar que un algoritmo esté compuesto de más de un paso, lo cual se traducirá en que su función de comportamiento sea la suma correspondiente de las funciones de cada paso.

Regla del máximo I

- Con el fin de determinar la ubicación de una función en la escala, y de manera semejante al razonamiento que se hace con los límites, cuando f es la suma de funciones $\{f_i\}_i$ podremos despreciar algunas funciones para quedarnos con la función representativa de f.

Regla del máximo I

- El hecho implícito en la idea expuesta es que habrá en está suma alguna función f_j que no pueda ser superada por las demás, entonces $O(\sum_i f_i(n)) = O(f_j)$.

Regla del máximo I

- Por ejemplo, $O(n^2 + n) = O(n^2)$, esto es, $\max\{n^2, n\} = n^2$. Usamos el operador $\max\{f_j(n), f_i(n)\} = f_j(n)$ para indicar que f_j siempre supera a f_i excepto en un número finito de puntos: $f_i(n) < f_j(n)$, para toda $n > N$.

Regla del máximo II

Proposición 5 (Regla del Máximo)

Si f y g son funciones de comportamiento, entonces

$$O(f(n) + g(n)) = O(\max\{f(n), g(n)\})$$

.

Regla del máximo II

Proposición 5 (Regla del Máximo)

Si f y g son funciones de comportamiento, entonces

$$O(f(n) + g(n)) = O(\max\{f(n), g(n)\})$$

.

- Debe cuidarse la premisa implícita establecida al inicio: las funciones de comportamiento son no negativas, y, en muchos casos, estrictamente positivas.

Regla del máximo II

Proposición 5 (Regla del Máximo)

Si f y g son funciones de comportamiento, entonces

$$O(f(n) + g(n)) = O(\max\{f(n), g(n)\})$$

.

- Debe cuidarse la premisa implícita establecida al inicio: las funciones de comportamiento son no negativas, y, en muchos casos, estrictamente positivas.
- Un ejemplo que muestra la obtención de errores al violar la premisa antedicha es:
  $O(n) = O(n + n^2 - n^2) = O(\max\{n, n^2, -n^2\}) = O(n^2)$.

Regla del máximo II

Proposición 5 (Regla del Máximo)

Si f y g son funciones de comportamiento, entonces

$$O(f(n) + g(n)) = O(\max\{f(n), g(n)\})$$

.

- Debe cuidarse la premisa implícita establecida al inicio: las funciones de comportamiento son no negativas, y, en muchos casos, estrictamente positivas.
- Un ejemplo que muestra la obtención de errores al violar la premisa antedicha es:
  $O(n) = O(n + n^2 - n^2) = O(\max\{n, n^2, -n^2\}) = O(n^2)$.
- El error es que aparece una función que no es de comportamiento (no es positiva).

Observación:

1. Recuerde cuando consideramos el ejemplo donde teniamos que: $f(n) = n^2$ y deciamos que $g_1(n) = n$, $g_2(n) = \log(n)$, $g_3(n) = n\log(n)$, $g_4(n) = 2n^2$ están en el orden de f.

Regla del máximo III

Observación:

1. Recuerde cuando consideramos el ejemplo donde teniamos que: $f(n) = n^2$ y deciamos que $g_1(n) = n$, $g_2(n) = \log(n)$, $g_3(n) = n\log(n)$, $g_4(n) = 2n^2$ están en el orden de f.
2. Tenemos claramente que $g_i(n) \in O(f(n))$, $i = 1, 2, 3, 4$. Pero además, si $h(n) = n^3$, entonces $f(n) \in O(h(n))$, puesto que con $c = 1$ y $N = 1$ se cumple que $n^2 \leq cn^3$ para toda $n \geq N$.

Regla del máximo III

Observación:

1. Recuerde cuando consideramos el ejemplo donde teniamos que: $f(n) = n^2$ y deciamos que $g_1(n) = n$, $g_2(n) = \log(n)$, $g_3(n) = n\log(n)$, $g_4(n) = 2n^2$ están en el orden de f.
2. Tenemos claramente que $g_i(n) \in O(f(n))$, $i = 1, 2, 3, 4$. Pero además, si $h(n) = n^3$, entonces $f(n) \in O(h(n))$, puesto que con $c = 1$ y $N = 1$ se cumple que $n^2 \leq cn^3$ para toda $n \geq N$.
3. Por otro lado, es fácil explicar por qué también $g_i(n) \in O(h(n))$: si sabemos que $g_i(n) \leq c_i f(n)$ y que $f(n) \leq ch(n)$, entonces $g_i(n) \leq c_i ch(n)$, esto es $g_i(n) \in O(h(n))$.

Regla del máximo III

Observación:

1. Recuerde cuando consideramos el ejemplo donde teniamos que: $f(n) = n^2$ y deciamos que $g_1(n) = n$, $g_2(n) = \log(n)$, $g_3(n) = n\log(n)$, $g_4(n) = 2n^2$ están en el orden de f.
2. Tenemos claramente que $g_i(n) \in O(f(n))$, $i = 1, 2, 3, 4$. Pero además, si $h(n) = n^3$, entonces $f(n) \in O(h(n))$, puesto que con $c = 1$ y $N = 1$ se cumple que $n^2 \leq cn^3$ para toda $n \geq N$.
3. Por otro lado, es fácil explicar por qué también $g_i(n) \in O(h(n))$: si sabemos que $g_i(n) \leq c_i f(n)$ y que $f(n) \leq ch(n)$, entonces $g_i(n) \leq c_i ch(n)$, esto es $g_i(n) \in O(h(n))$.
4. Lo anterior puede sostenerse sin que haya referencia alguna a los ejemplos particulares que hemos dado, bastan las definiciones e hipótesis.

Regla del máximo IV

5. Un hecho importante pero aparentemente sin utilidad es que para toda función de comportamiento f se cumple que $f(n) \in O(f(n))$.

Regla del máximo IV

5. Un hecho importante pero aparentemente sin utilidad es que para toda función de comportamiento f se cumple que $f(n) \in O(f(n))$.
6. Es posible aún imaginar que un par de funciones f, g cumpla $f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \in O(f(n))$. Aquí también es fácil ver que $O(f(n)) = O(g(n))$, pues para cualquier f_1 tal que $f_1 \in O(f(n))$ se tiene $f_1(n) \leq cf(n)$ $(n > N_1)$, pero además por hipóteis $f(n) \leq dg(n)$ $(n > N_2)$ luego para toda $f_1 \in O(f(n))$: $f_1(n) \leq cdg(n)$ $(n > \max\{N_1, N_2\})$. Por tanto $O(f(n)) \subset O(g(n))$. Similarmente puede verse que $O(g(n)) \subset O(f(n))$.

Regla del máximo IV

5. Un hecho importante pero aparentemente sin utilidad es que para toda función de comportamiento f se cumple que $f(n) \in O(f(n))$.
6. Es posible aún imaginar que un par de funciones f, g cumpla $f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \in O(f(n))$. Aquí también es fácil ver que $O(f(n)) = O(g(n))$, pues para cualquier f_1 tal que $f_1 \in O(f(n))$ se tiene $f_1(n) \leq cf(n)$ $(n > N_1)$, pero además por hipóteis $f(n) \leq dg(n)$ $(n > N_2)$ luego para toda $f_1 \in O(f(n))$: $f_1(n) \leq cdg(n)$ $(n > \max\{N_1, N_2\})$. Por tanto $O(f(n)) \subset O(g(n))$. Similarmente puede verse que $O(g(n)) \subset O(f(n))$.
7. Si convenimos definir la relación "$\in O$", ésta es reflexiva y transitiva, y por tanto es una relación de orden parcial.

Demostración de la regla del máximo I

Ahora demostraremos la regla del máximo (Proposición (5))

$$O(f(n) + g(n)) = O(\max\{f(n), g(n)\}).$$

Demostración de la regla del máximo I

Ahora demostraremos la regla del máximo (Proposición (5))

$$O(f(n) + g(n)) = O(\max\{f(n), g(n)\}).$$

Observe que

$$f(n) + g(n) = \min\{f(n), g(n)\} + \max\{f(n), g(n)\}$$

Demostración de la regla del máximo I

Ahora demostraremos la regla del máximo (Proposición (5))

$$O(f(n) + g(n)) = O(\max\{f(n), g(n)\}).$$

Observe que

$$f(n) + g(n) = \min\{f(n), g(n)\} + \max\{f(n), g(n)\}$$

y que

$$0 \leq \min\{f(n), g(n)\} \leq \max\{f(n), g(n)\}.$$

Demostración de la regla del máximo I

Ahora demostraremos la regla del máximo (Proposición (5))

$$O(f(n) + g(n)) = O(\max\{f(n), g(n)\}).$$

Observe que

$$f(n) + g(n) = \min\{f(n), g(n)\} + \max\{f(n), g(n)\}$$

y que

$$0 \leq \min\{f(n), g(n)\} \leq \max\{f(n), g(n)\}.$$

Se sigue que

$$\max\{f(n), g(n)\} \leq f(n) + g(n) \leq 2\max\{f(n), g(n)\} \tag{2}$$

Demostración de la regla del máximo II

$\rightarrow$

Considere cualquier $t(n) \in O(f(n) + g(n))$ y sea c una constante adecuada tal que

$$t(n) \leq c(f(n) + g(n)),$$

para todo n suficientemente grande.

Demostración de la regla del máximo II

$\rightarrow$

Considere cualquier $t(n) \in O(f(n) + g(n))$ y sea c una constante adecuada tal que

$$t(n) \leq c(f(n) + g(n)),$$

para todo n suficientemente grande.

De la ecuación 2 se sigue que

$$t(n) \leq c\ 2 \max\{f(n) + g(n)\},$$

Demostración de la regla del máximo II

$\rightarrow$

Considere cualquier $t(n) \in O(f(n) + g(n))$ y sea c una constante adecuada tal que

$$t(n) \leq c(f(n) + g(n)),$$

para todo n suficientemente grande.

De la ecuación 2 se sigue que

$$t(n) \leq c\ 2 \max\{f(n) + g(n)\},$$

por lo tanto

$$t(n) \in O(\max\{f(n) + g(n)\}).$$

Demostración de la regla del máximo III

$\leftarrow$

Sean $t(n) \in O(\max\{f(n), g(n)\})$ y c' una constante adecuada tal que

$$t(n) \leq c' \max\{f(n), g(n)\}$$

para todo n suficientemente grande.

Demostración de la regla del máximo III

$\leftarrow$

Sean $t(n) \in O(\max\{f(n), g(n)\})$ y c' una constante adecuada tal que

$$t(n) \leq c' \max\{f(n), g(n)\}$$

para todo n suficientemente grande.

De la ecuación 2 se sigue que

$$t(n) \leq c'(f(n) + g(n)),$$

Demostración de la regla del máximo III

$\leftarrow$

Sean $t(n) \in O(\max\{f(n), g(n)\})$ y c' una constante adecuada tal que

$$t(n) \leq c' \max\{f(n), g(n)\}$$

para todo n suficientemente grande.

De la ecuación 2 se sigue que

$$t(n) \leq c'(f(n) + g(n)),$$

por lo tanto

$$t(n) \in O(f(n) + g(n)).$$

Advertencia I

Recuerde siempre que la regla del máximo aplica para funciones de comportamiento, es decir, funciones f tales que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$.

Advertencia I

Recuerde siempre que la regla del máximo aplica para funciones de comportamiento, es decir, funciones f tales que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$.

Así las siguientes maneras de aplicarla son incorrectas:

Advertencia I

Recuerde siempre que la regla del máximo aplica para funciones de comportamiento, es decir, funciones f tales que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$.

Así las siguientes maneras de aplicarla son incorrectas:

- $$O(n) = O(n + n^2 - n^2) = O(\max\{n, n^2, -n^2\}) = O(n^2)$$

Advertencia I

Recuerde siempre que la regla del máximo aplica para funciones de comportamiento, es decir, funciones f tales que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$.

Así las siguientes maneras de aplicarla son incorrectas:

- $$O(n) = O(n + n^2 - n^2) = O(\max\{n, n^2, -n^2\}) = O(n^2)$$

- $$\begin{gathered} O(12n^3 \log n - 5n^2 + \log^2 n + 36) = \\ O(\max\{12n^3 \log n, -5n^2, \log^2 n, 36\}) = \\ O(12n^3 \log n) = \\ O(n^3 \log n) \end{gathered}$$

Advertencia II

Las maneras correctas de aplicarla son:

Advertencia II

Las maneras correctas de aplicarla son:

- $$O(n) = O(n + n^2 - n^2) = O(\max\{n, n^2 - n^2\}) = O(n, 0) = O(n)$$

Advertencia II

Las maneras correctas de aplicarla son:

- $$O(12n^3 \log n - 5n^2 + \log^2 n + 36) =$$
  $$O(11n^3 \log n + n^3 \log n - 5n^2 + \log^2 n + 36) =$$
  $$O(\max\{11n^3 \log n, n^3 \log n - 5n^2, \log^2 n, 36\}) =$$
  $$O(11n^3 \log n) =$$
  $$O(n^3 \log n)$$

Ejercicios

1. Demuestre o refute las siguientes afirmaciones:
   1. $n^3 \in O(n^2)$,
   2. $2^{n+1} \in O(2^n)$,
   3. $n! \in O((n+1)!)$.
2. Sea $k \in \mathbb{N}$. Demuestre que si una función de comportamiento f expresada por $f(n) = f_1(n) + f_2(n) + \cdots + f_k(n)$ donde $f_1, f_2, \ldots, f_k$ son también funciones de comportamiento, y $g(n) = \max\{f_1(n), f_2(n), \ldots, f_k(n)\}$ entonces $O(f(n)) = O(g(n))$.
3. Usando el resultado del problema anterior, por qué no es posible afirmar que

$$O(n) = O(\max\{\overbrace{n, \ldots, n}^{n \text{ veces}}\}) = O(\overbrace{n + \cdots + n}^{n \text{ veces}}) = O(n^2).$$

4. Demuestre que $f(n) \in O(f(n))$.
5. Sea $a > 0 \in \mathbb{R}$ demuestre que $af(n) \in O(f(n))$.